Inocențiu DRĂGHICESCU

Nicolae PAPACU

CÂTEVA COMPLEMENTE DE GEOMETRIE ÎNTR-UN TRIUNGHI

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

PREFAȚĂ 3

1. DREPTE CONCURENTE ÎN TRIUNGHI
   1.1. Ceviene 7
   1.2. Ceviene izogonale 8
   1.3. Triplete de ceviene concurente particulare 10
   1.4. Puncte remarcabile într-un triunghi 13
   1.5. Alte puncte remarcabile 20
   1.6. Două completări 27

2. TRIUNGHIURI PEDALE
   2.1. Triunghiul pedal 37
   2.2. Inegalități între ariile triunghiurilor pedale asociate unor puncte remarcabile 44

3. TRIUNGHIURI PODARE
   3.1. Triunghiul podar 53
   3.2. Observații privind distanțele 54
   3.3. Maximul ariei triunghiului podar 55
   3.4. Ariile triunghiurilor podare asociate unor puncte remarcabile 58
   3.5. Inegalități cu ariile triunghiurilor pedale asociate unor puncte remarcabile 67

4. TRIUNGHIURI PEDALE ȘI PODARE
   4.1. Relații între distanțele și rapoartele 77
   4.2. Raportul între aria triunghiul pedal și podar asociate unui punct 77

5. TRIUNGHIURI CIRCUMPEDALE
   5.1. Ariile triunghiurilor circumpedale asociate unor puncte remarcabile 85
   5.2. Ariile triunghiurilor circumpedale asociate punctelor de intersecție al cevienelor de același ordin 91

1. DREPTE CONCURENTE ÎN TRIUNGHI

1.1. CEVIENE

O ceviană este segmentul care unește un vârf al unui triunghi cu un punct oarecare de pe latura opusă. Medianele, bisectoarele și înălțimile sunt ceviene particulare.

Dacă ***AA'*** este o ceviană (***fig. 1***) este binecunoscută ***teorema lui Stewart***, care afirmă că este adevărată egalitatea:

$$A'A^2 \cdot BC = AB^2 \cdot A'C + AC^2 \cdot A'B - A'B \cdot A'C \cdot BC$$

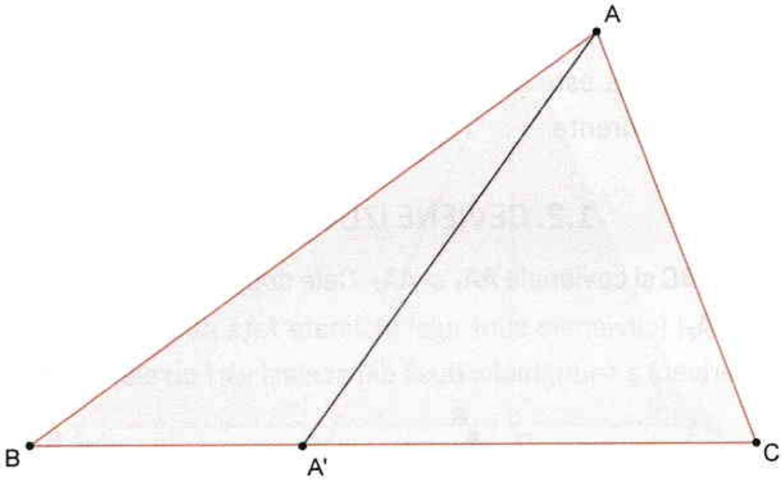

Fig.1

Dacă din fiecare vârf al unui triunghi se duce câte o ceviană, cele trei ceviene pot fi concurente (au un punct comun) sau nu. În primul caz, tripletului de ceviene i se atașează punctul lor de concurență. În context considerăm și situația reciprocă în care luând un punct oarecare interior unui triunghi îi atașăm tripletele bine determinate de ceviene diferite concurente în acel punct.

Pentru tripletele de ceviene concurente este celebră ***teorema lui Ceva***. Cu notațiile din *fig. 2*, aceasta afirmă că este adevărată egalitatea:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

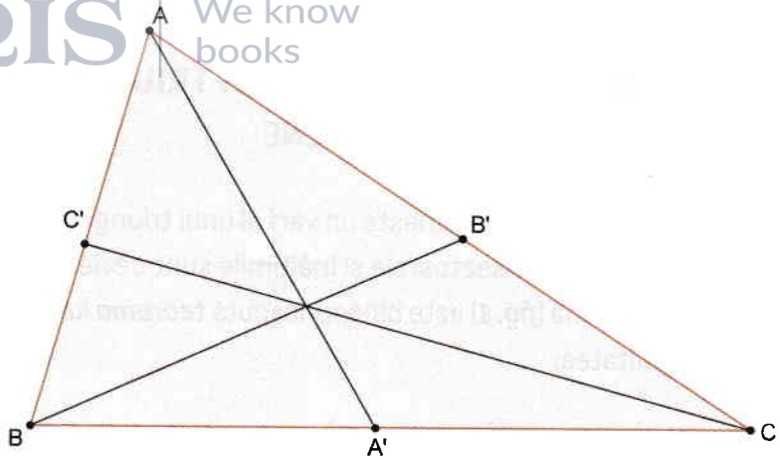

Fig.2

Reciproca teoremei este adevărată, deci considerând punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$, dacă este adevărată egalitatea de mai înainte, atunci cevienele ***AA₁***, ***BB₁*** și ***CC₁*** sunt concurente.

1.2. CEVIENE IZOGONALE

Fie triunghiul ***ABC*** și cevienele ***AA₁*** și ***AA₂***. Cele două ceviene sunt ***izogonale*** dacă $m(\angle BAA_1)=m(\angle CAA_2)$ (cevienele sunt egal înclinate față de laturile triunghiului și față de bisectoarea interioară a triunghiului dusă din același vârf cu ele) (***fig.3***).

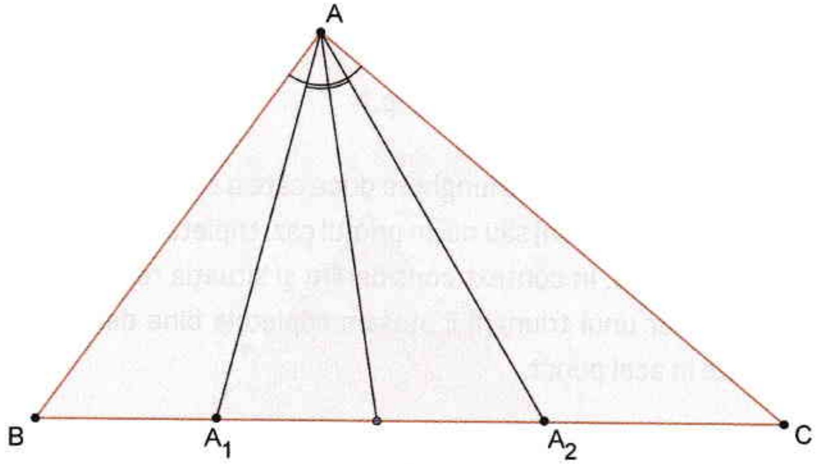

Fig.3

Pentru perechile de ceviene izogonale este binecunoscută ***teorema lui Steiner***. Aceasta afirmă că, dacă ***AA₁*** și ***AA₂*** sunt ceviene izogonale este adevărată egalitatea

$$\frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2} = \frac{AB^2}{AC^2} \qquad (1)$$

Într-adevăr, observăm mai întâi că

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{\sigma[ABA_1]}{\sigma[ACA_1]}=\frac{AB\cdot\sin(\angle BAA_1)}{AC\cdot\sin(\angle CAA_1)},\ \frac{BA_2}{CA_2}=\frac{\sigma[ABA_2]}{\sigma[ACA_2]}=\frac{AB\cdot\sin(\angle BAA_2)}{AC\cdot\sin(\angle CAA_2)},$$

iar egalitatea din enunțul teoremei rezultă imediat din aceste egalități prin înmulțire.

Și reciproca acestei teoreme este adevărată. Dacă A_1 și A_2 sunt puncte pe latura **BC** și este adevărată egalitatea (*1*), atunci AA_1 și AA_2 sunt ceviene izogonale. Demonstrația se dă ușor prin reducere la absurd.

Un exemplu de ceviene izogonale este cel ilustrat în ***fig. 4*** de către înălțimea **AD** și ceviana **AE** situată pe diametrul **AF**.

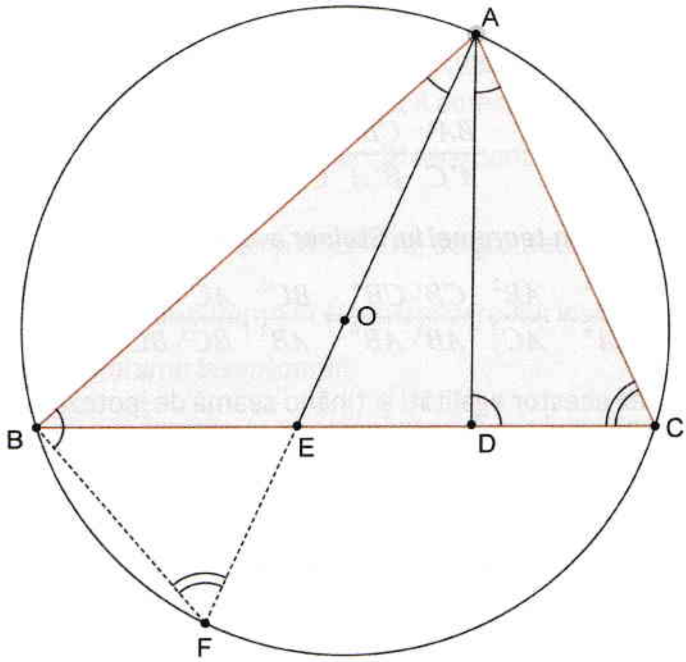

Fig.4

Afirmația decurge din faptul că unghiurile $\angle BAF$ și $\angle CAD$ sunt congruente având complemente congruente în triunghiurile dreptunghice **ABD**, respectiv **ADC**.

Observații.

1. Relația (*1*) exprimă legătura dintre rapoartele în care punctele A_1 și A_2 împart latura *BC*.

2. Dacă trei ceviene **AA'**, **BB'**, **CC'** sunt concurente atunci și izogonalele lor **AA"**, **BB"**, **CC"** (*fig. 5*) sunt concurente.

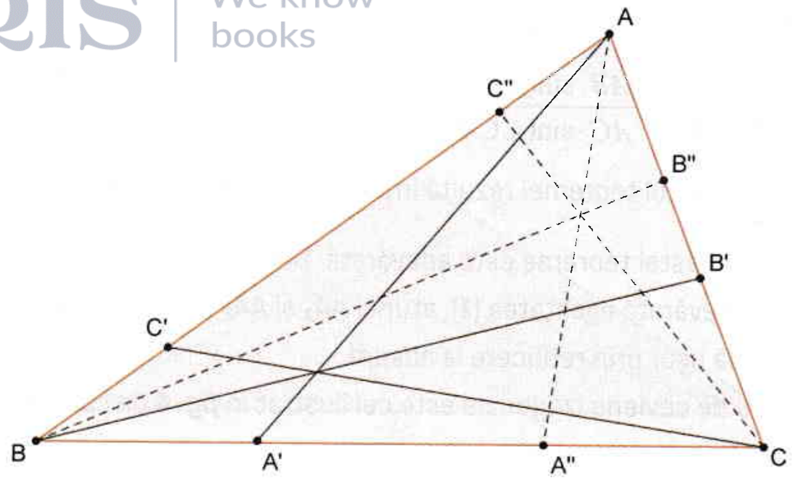

Fig.5

Într-adevăr, prin ipoteză avem

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

De asemenea conform ***teoremei lui Steiner*** avem

$$\frac{BA'\cdot BA"}{CA'\cdot CA"}=\frac{AB^2}{AC^2},\frac{CB'\cdot CB"}{AB'\cdot AB"}=\frac{BC^2}{AB^2},\frac{AC'\cdot AC"}{BC'\cdot BC"}=\frac{AC^2}{BC^2}$$

iar prin înmulțirea acestor egalități și ținând seamă de ipoteză, rezultă egalitatea

$$\frac{BA"}{A"C}\cdot\frac{CB"}{B"A}\cdot\frac{AC"}{C"B}=1$$

Conform reciprocei ***teoremei lui Ceva***, ea ne arată că ***AA", BB", CC"*** sunt ceviene concurente.

1.3. TRIPLETE DE CEVIENE CONCURENTE PARTICULARE

În cele ce urmează vom considera de referință un triunghi ***ABC*** împreună cu notațiile uzuale ***a=BC, b=AC, c=AB*** pentru laturile triunghiului $p=\frac{a+b+c}{2}$ semiperimetrul, ***S*** aria triunghiului, ***R*** și ***r*** razele cercurilor circumscris, respectiv înscris.

Dacă ***AA₁***, ***BB₁*** și ***CC₁*** ($A_1\in(BC),B_1\in(CA),C_1\in(AB)$) sunt ceviene concurente (***fig. 6***) notăm $x=\frac{BA_1}{A_1C},y=\frac{CB_1}{B_1A},z=\frac{AC_1}{C_1B}$ și conform ***teoremei lui Ceva*** este adevărată relația $xyz=1$.

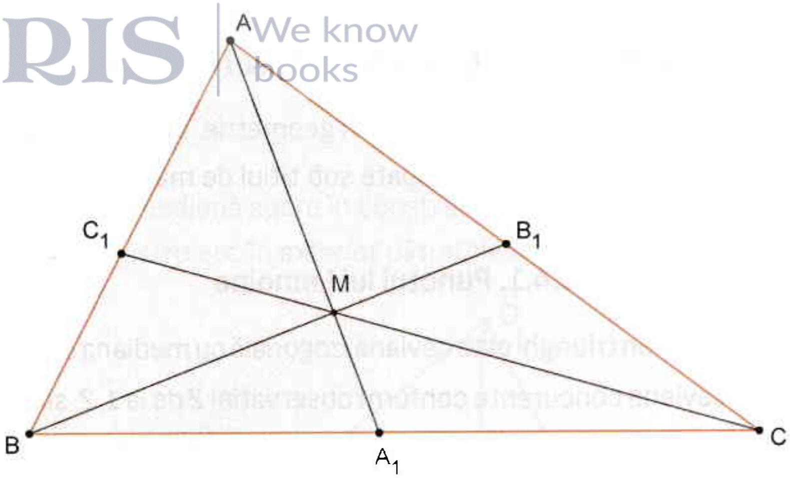

Fig.6

Tripletul de valori (*x*, *y*, *z*) corespunde punctului de concurență *M*; reciproc, unui triplet (*x*, *y*, *z*), *x*>0, *y*>0, *z*>0, pentru care ***xyz =1*** îi corespunde un punct ***M***.

În context menționăm datele corespunzătoare pentru tripletele liniilor importante dintr-un triunghi ***ABC***

- pentru ***<u>mediane</u>***, concurente în ***G*** (centrul de greutate) $x = y = z = 1$;

- pentru ***<u>bisectoare</u>***, concurente în ***I*** (centrul cercului înscris) $x = \frac{c}{b}, y = \frac{a}{c}, z = \frac{b}{a}$, (rezultate afirmate de ***teorema bisectoarei***);

- pentru înălțimi concurente în ***H*** (*ortocentru*) avem (vezi ***fig.4***)

$$x = \frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot \cos B}{AC \cdot \cos C} = \frac{\sin C \cdot \cos B}{\sin C \cdot \cos B}$$, adică $x = \frac{ctgB}{ctgC}, y = \frac{ctgC}{ctgA}, z = \frac{ctgA}{ctgB}$ sau

$$x = \frac{tgC}{tgB}, y = \frac{tgA}{tgC}, z = \frac{tgB}{tgA}$$

- ***<u>mediatoarele</u>*** unui triunghi sunt, se știe, concurente în ***O*** (centrul cercului circumscris). Ele nu sunt ceviene, dar punctului ***O*** îi atașăm tripletul cevienelor determinate de cei trei diametri din vârful triunghiului.

Pentru evaluarea raportului ***x*** observăm (***fig.4***) $x = \frac{BE}{EC} = \frac{\sigma[ABE]}{\sigma[ACE]} = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAE)}{AC \cdot \sin(\angle CAE)}$

Cum triunghiul ***ABF*** este dreptunghic iar unghiul $\widehat{F}$ este congruent cu $\widehat{C}$, avem $\sin(\angle BAE) = \cos\widehat{F} = \cos\widehat{C}$; analog $\sin(\angle CAE) = \cos\widehat{B}$. Rezultă $x = \frac{AB \cdot \cos C}{AC \cdot \cos B}$ și cum $\frac{AB}{AC} = \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin B}$, obținem $x = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$; analog $y = \frac{\sin 2A}{\sin 2C}$, $z = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$.

1.4. PUNCTE REMARCABILE ÎN TRIUNGHI

Punctele (*G, I, H, O*) sunt, se știe, celebre în geometrie. Împreună cu ele menționăm alte câteva puncte cu statut deosebit, grupate sub titlul de mai sus.

1.4.1. Punctul lui Lemoine

O ***simediană*** într-un triunghi este ceviana izogonală cu mediana din vârful respectiv. Fiind izogonale de ceviene concurente conform observației ***2*** de la ***1.2.*** simedianele dintr-un triunghi vor fi și ele concurente. Punctul de concurență este ***punctul lui Lemoine*** (notat ***K*** sau ***L***). Dacă ***AA'*** este simediană în triunghiul ***ABC*** (***fig.7***) se observă că potrivit ***teoremei lui Steiner*** avem $\frac{BA'}{A'C}=\frac{c^2}{b^2}$.

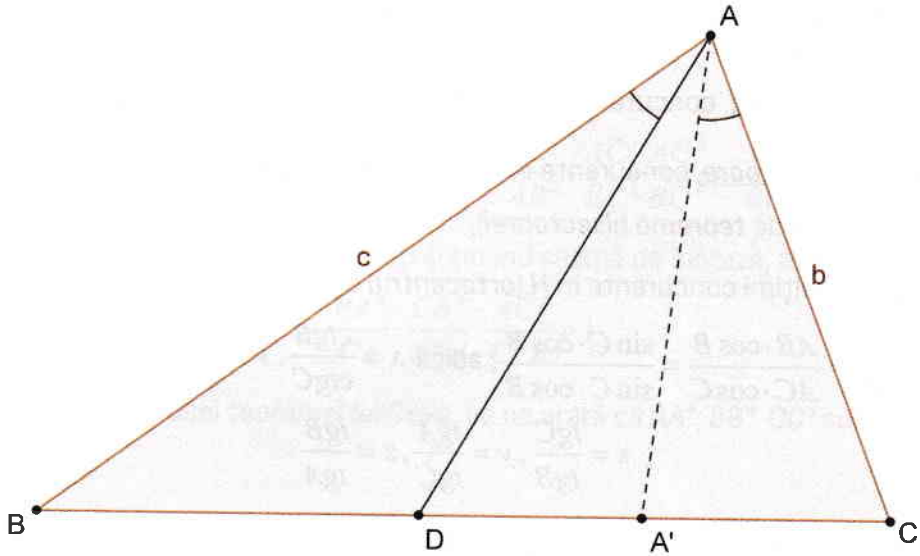

Fig.7

În sens reciproc, dacă pentru punctul ***A'*** de pe latura ***BC*** (***fig.7***) este adevărată egalitatea anterioară, atunci ***A'*** este piciorul simedianei din ***A*** a triunghiului.

Demonstrația afirmației se dă ușor prin reducere la absurd.

Conchidem că o ceviană ***AA'*** este simediană în triunghiul ***ABC*** dacă și numai dacă

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{c^2}{b^2}$$

Totodată menționăm că raportul x va fi $x=\dfrac{c^2}{b^2}$; analog $y=\dfrac{a^2}{c^2}$, $z=\dfrac{b^2}{a^2}$.

Observație.

Un exemplu de simediană apare în construcția următoare. Pe laturile ***AB*** și ***AC*** ale triunghiului ***ABC*** se construiesc în exterior pătratele ***AMNB*** și ***APQC*** (***fig.8***)

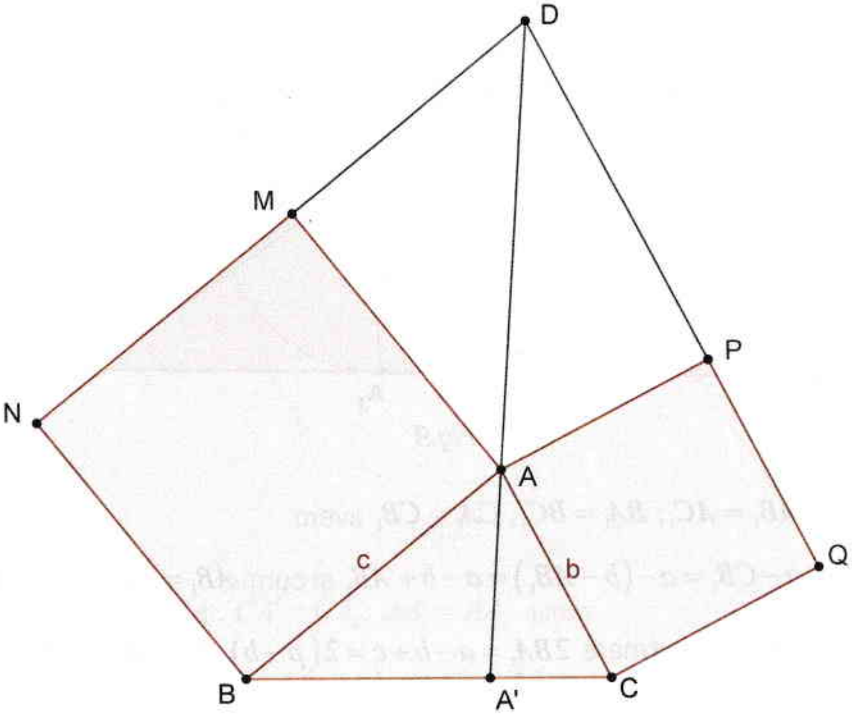

Fig.8

Dreptele ***MN*** și ***PQ*** se intersectează în ***D***, iar ***AD*** intersectează ***BC*** în ***A'***. Arătăm că ***AA'*** este simediană în triunghiul ***ABC***.

Pentru aceasta observăm mai întâi că $\dfrac{BA'}{A'C}=\dfrac{\sigma[ABA']}{\sigma[ACA']}=\dfrac{c\sin(\angle A'AB)}{b\sin(\angle A'AC)}$.

Dar $\sin(\angle A'AB)=\sin(\angle ADM)=\dfrac{MA}{AD}=\dfrac{c}{AD}$ și analog $\sin(\angle A'AC)=\dfrac{b}{AD}$.

Rezultă $\dfrac{BA'}{A'C}=\dfrac{c^2}{b^2}$, deci ***AA'*** este simediană în triunghiul ***ABC***.

1.4.2. Punctul lui Gergone

Fie triunghiul ***ABC*** și cercul înscris în el, tangent laturilor sale în $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ (***fig.9***).

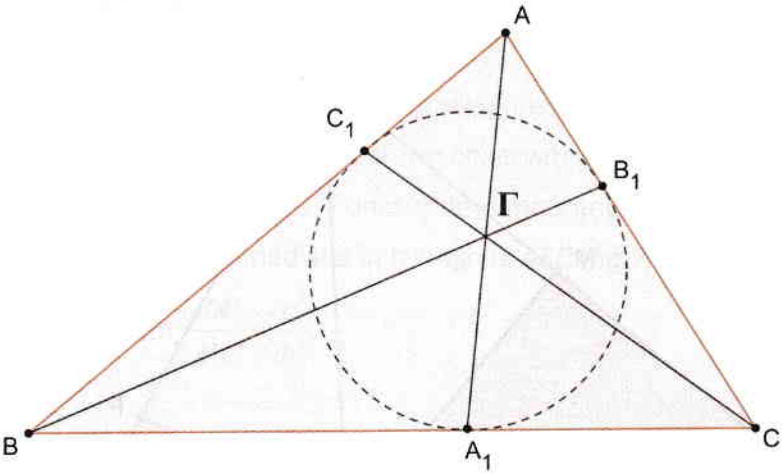

Fig.9

Deoarece $AB_1 = AC_1,\ BA_1 = BC_1,\ CA_1 = CB_1$ avem

$BA_1 = a - CA_1 = a - CB_1 = a - (b - AB_1) = a - b + AB_1$ și cum $AB_1 = AC_1 = c - BC_1$, avem

$BA_1 = a - b + c - BA_1$, prin urmare $2BA_1 = a - b + c = 2(p-b)$, deci $BA_1 = BC_1 = p - b$.

Analog avem $AB_1 = AC_1 = p - a,\ CA_1 = CB_1 = p - c$ și astfel găsim că

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{p-a}{p-b} = 1$$

Deci, conform reciprocei ***teoremei lui Ceva***, cevienele $\boldsymbol{AA_1}$, $\boldsymbol{BB_1}$, $\boldsymbol{CC_1}$ sunt concurente. Punctul lor comun este Γ - ***punctul lui Gergone***.

Tripletul (x, y, z) corespunzător este $x = \frac{p-b}{p-c}$, $y = \frac{p-c}{p-a}$, $z = \frac{p-a}{p-b}$, rezultate echivalente cu

$$x = \frac{tg\frac{C}{2}}{tg\frac{B}{2}},\ y = \frac{tg\frac{A}{2}}{tg\frac{C}{2}},\ z = \frac{tg\frac{B}{2}}{tg\frac{A}{2}}$$

1.4.3. Punctul lui Nagel

Fie triunghiul ***ABC*** și cele trei cercuri exînscrise (***fig.10***).

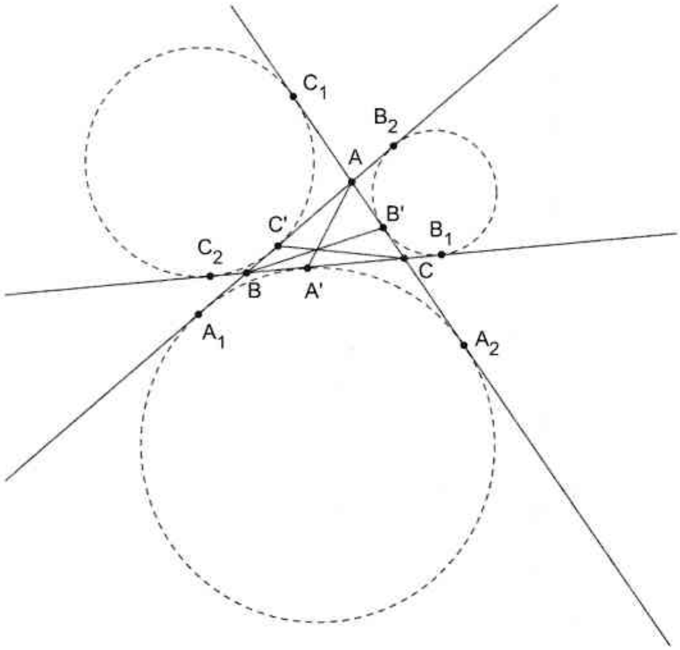

Fig.10

Deoarece $BA' = BA_1,\ CA' = CA_2,\ AA_1 = AA_2$ avem

$BA' = a - CA' = a - CA_2 = a - (AA_2 - b) = a + b - AA_1$ și cum $AA_1 = c + BA'$ avem

$BA' = a + b - c - BA'$. Rezultă că $2 \cdot BA' = a + b - c = 2(p - c)$, deci $BA' = p - c$

și imediat $CA' = p - b$. Prin urmare $x = \dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{p-c}{p-b}$.

Analog $y = \dfrac{p-a}{p-c}$, $z = \dfrac{p-b}{p-a}$ și cum $xyz=1$ rezultă că cevienele ***AA', BB', CC'*** sunt concurente.

Punctul de concurență ***N*** este ***punctul lui Nagel***.

Tripletul corespunzător este $x = \dfrac{p-c}{p-b},\ y = \dfrac{p-a}{p-c},\ z = \dfrac{p-b}{p-a}$, sau echivalent

$$x = \frac{tg\dfrac{B}{2}}{tg\dfrac{C}{2}},\ y = \frac{tg\dfrac{C}{2}}{tg\dfrac{A}{2}},\ z = \frac{tg\dfrac{A}{2}}{tg\dfrac{B}{2}}$$

Observație

Considerăm triunghiul ***ABC*** împreună cu cercul înscris și cercul circumscris tangent laturii ***BC*** (***fig.11***)

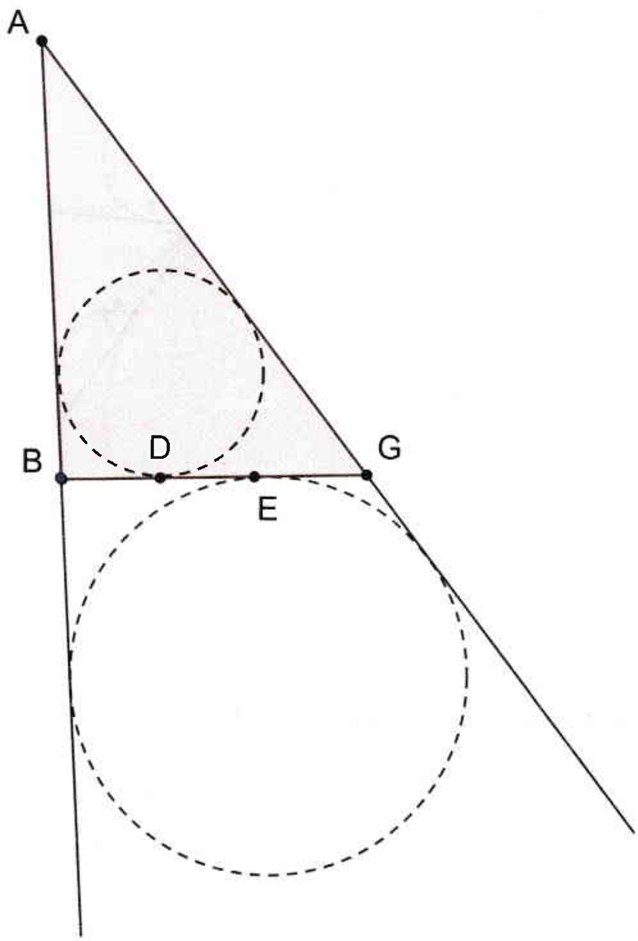

Fig.11

Deoarece celor demonstrate mai înainte $BD = p - b = CE$, rezultă că punctele ***D*** și ***E*** sunt egal depărtate de ***B*** și respectiv ***C***, deci sunt simetric dispuse pe ***BC*** față de mijlocul acestei laturi. Spunem că punctele ***D*** și ***E*** sunt ***izotomice***.

Este ușor de sesizat că, dacă ***A'***, ***B'***, ***C'*** sunt puncte pe laturile ***BC***, ***CA***, respectiv ***AB*** ale triunghiului ***ABC***, iar ***A"***, ***B"***, ***C"*** sunt corespunzătoarele lor izotomice, atunci cevienele ***AA'***, ***BB'***, ***CC'*** sunt concurente dacă și numai dacă cevienele ***AA"***, ***BB"***, ***CC"*** sunt concurente.